ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE, AND MANAGEMENT



УДК 519.6
DOI 10.12737/22155

О четырехслойной итерационной схеме*

Ю. В. Белова[1], А. Е. Чистяков[2], Е. А. Проценко[3]**
[1,2] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[3] Ростовский государственный экономический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

On four-layer iterative scheme***

Y. V. Belova[1], A. E. Chistyakov[2], E. A. Protsenko[3]**
[1,2] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia
[3] Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russia

Целью работы является исследование скорости сходимости четырехслойной итерационной схемы. Рассматривается задача нахождения приближенного решения линейного операторного уравнения *Au* = *f*. Для решения такой задачи используются двухслойные и трехслойные итерационные методы. При этом трехслойные методы сопряженных направлений сходятся значительно быстрее, чем двухслойные градиентные методы. Задача исследования — установить, имеет ли четырехслойная схема преимущество в скорости сходимости по сравнению с трехслойной схемой. Для этого приводится четырехслойная итерационная схема решения сеточных уравнений, и рассчитываются ее параметры.
Доказано, что четырехслойная итерационная схема вариационного типа для решения сеточных уравнений выражается к трехслойной схеме.

Ключевые слова: сеточные уравнения, трехслойная схема, четырехслойная схема, методы вариационного типа.

The work objective is to study the four-layer scheme convergence rate. The problem of finding an approximate solution to the linear operator equation *Au* = *f* is considered. Two-layer and three-layer iterative methods are used to solve this problem. At that, the three-layer conjugate directions methods converge faster than the two-layer gradient methods. The research problem is to establish whether the four-layer scheme has a speed advantage as compared to the three-layer scheme. The four-layer scheme is constructed, and its parameters are calculated for this purpose. It is proved that the four-layer iterative scheme of a variational type for solving finite-difference equations downs to the three-layer scheme.

Keywords: finite-difference equations, three-layer scheme, four-layer scheme, variational methods.

Введение. Большинство прикладных задач таких, как задача транспорта веществ [1–3], гидродинамики мелководных водоемов [4–5], аэродинамики [6–7], динамики популяций [8] и других, сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для решения таких систем уравнений используются двух- и трехслойные итерационные схемы.

Рассмотрим задачу нахождения приближенного решения линейного операторного уравнения [9].

$$Au = f\ , \qquad (1)$$

где A — симметричный положительно определенный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H.

Для увеличения скорости сходимости вместо двухслойных итерационных методов используются трехслойные итерационные методы. Эти методы исследованы в работе [10]. Ниже приведено исследование четырехслойной итерационной схемы. Условия устойчивости такой схемы получены в работе [11].

Четырехслойная итерационная схема решения сеточных уравнений имеет вид

$$By_{k+1} = \beta_{k+1}\left(B - \tau_{k+1}A\right)y_k + \left(1-\alpha_{k+1}\right)By_{k-1} + \left(\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}\right)By_{k-2} + \beta_{k+1}\tau_{k+1}f\ , \qquad (2)$$

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-08619), а также по Программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 1.33П, проект 00-16-13
** E-mail: yvbelova@yandex.ru, cheese_05@mail.ru, eapros@rambler.ru
*** The research is done with the financial support from RFFI (grant no. 15-01-08619) and within the frame of the RAS Presidium Program of Fundamental Research no. 1.33P, project 00-16-13.

для $k = 2,3,\ldots$, $By_1 = \beta\left(B - \tau_1 A\right) y_0 + \tau_1 f$, $By_2 = \beta_2\left(B - \tau_2 A\right) y_1 + \left(1 - \alpha_2\right) By_0 + \beta_2 \tau_2 f$, $y_0 \in H$.

Необходимо найти параметры $\{\tau_k\}$, $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, при которых норма эквивалентной погрешности $x_k = y_k - u$ была бы минимальной для любого *k*.

Расчет параметров схемы. Перепишем (2) в виде

$$B\frac{\left(y_{k+1} + \left(\alpha_{k+1} - 1\right) y_{k-1} + \left(\beta_{k+1} - \alpha_{k+1}\right) y_{k-2}\right)/\beta_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} = f - Ay_k .$$

Действительно, для уравнения погрешности схемы (2)

$$\frac{x_{k+1} + \left(\alpha_{k+1} - 1\right) x_{k-1} + \left(\beta_{k+1} - \alpha_{k+1}\right) x_{k-2}}{\beta_{k+1}} - x_k = -\tau_{k+1} C x_k ,\ C = B^{-1} A .$$

Или $x_{k+1} = \beta_{k+1}\left(E - \tau_{k+1} C\right) x_k + \left(1 - \alpha_{k+1}\right) x_{k-1} + \left(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}\right) x_{k-2}$. (3)

Для минимизации нормы x_k в H ($n \ge 1$) необходимо и достаточно, чтобы

$\left(x_{k+1}, Cx_j\right) = 0$, $j = \overline{0,k}$, (4)

или $\left(x_{k+1}, Cx_j\right) = -\beta_{k+1}\tau_{k+1}\left(Cx_k, Cx_j\right) = 0$.

При $k = j$ получим $\left(x_{k+1}, Cx_k\right) = -\beta_{k+1}\tau_{k+1}\left(Cx_k, Cx_k\right) = 0$.

Из (3), (4) следует

$$\left(Cx_{k-2}, x_{k+1}\right) = \beta_{k+1}\left(Cx_{k-2}, \left(E - \tau_{k+1} C\right) x_k\right) + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)\left(Cx_{k-2}, x_{k-1}\right) +$$
$$+ \left(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}\right)\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right),$$
$$\left(Cx_{k-1}, x_{k+1}\right) = \beta_{k+1}\left(Cx_{k-1}, \left(E - \tau_{k+1} C\right) x_k\right) + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)\left(Cx_{k-1}, x_{k-1}\right) +$$
$$+ \left(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}\right)\left(Cx_{k-1}, x_{k-2}\right),$$
$$\left(Cx_k, x_{k+1}\right) = \beta_{k+1}\left(Cx_k, \left(E - \tau_{k+1} C\right) x_k\right) + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)\left(Cx_k, x_{k-1}\right) + \left(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}\right)\left(Cx_k, x_{k-2}\right).$$

Запишем систему для расчета $\{\tau_k\}$, $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$

$$\begin{cases} -\tau_{k+1}\beta_{k+1}\left(Cx_{k-2}, Cx_k\right) + \left(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}\right)\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right) = 0, \\ -\tau_{k+1}\beta_{k+1}\left(Cx_{k-1}, Cx_k\right) + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)\left(Cx_{k-1}, x_{k-1}\right) = 0, \\ \left(Cx_k, x_k\right) - \tau_{k+1}\left(Cx_k, Cx_k\right) = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему уравнений

$$\begin{cases} \beta_{k+1} = \alpha_{k+1}\dfrac{\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right)}{\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right) + \tau_{k+1}\left(Cx_{k-2}, Cx_k\right)}, \\ \tau_{k+1}\alpha_{k+1}\dfrac{\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right)\left(Cx_{k-1}, Cx_k\right)}{\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right) + \tau_{k+1}\left(Cx_{k-2}, Cx_k\right)} + \alpha_{k+1}\left(Cx_{k-1}, x_{k-1}\right) = \left(Cx_{k-1}, x_{k-1}\right), \\ \tau_{k+1} = \dfrac{\left(Cx_k, x_k\right)}{\left(Cx_k, Cx_k\right)}. \end{cases}$$

Введем обозначение

$\phi_{k+1} = \dfrac{\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right)}{\left(Cx_{k-2}, x_{k-2}\right) + \tau_{k+1}\left(Cx_{k-2}, Cx_k\right)}$, тогда

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(Cx_k, x_k\right)}{\left(Cx_k, Cx_k\right)},\ \alpha_{k+1} = \frac{\left(Cx_{k-1}, x_{k-1}\right)}{\left(Cx_{k-1}, x_{k-1}\right) + \tau_{k+1}\phi_{k+1}\left(Cx_{k-1}, Cx_k\right)},$$

$\beta_{k+1} = \alpha_{k+1}\phi_{k+1}$.

Преобразуем выражение (3)

$$Cx_{k-2} = \left(-x_{k-1} + \beta_{k-1} x_{k-2} + \left(1 - \alpha_{k-1}\right) x_{k-3} + \left(\alpha_{k-1} - \beta_{k-1}\right) x_{k-4}\right)/\left(\tau_{k-1}\beta_{k-1}\right).$$

Запишем выражение $\left(Cx_{k-2}, Cx_k\right)$ с учетом полученного выражения

$$\left(Cx_{k-2}, Cx_k\right) = \left(\left(-x_{k-1} + \beta_{k-1} x_{k-2} + \left(1 - \alpha_{k-1}\right) x_{k-3} + \left(\alpha_{k-1} - \beta_{k-1}\right) x_{k-4}\right)/\left(\tau_{k-1}\beta_{k-1}\right), Cx_k\right) = 0 .$$

Таким образом, получим $\phi_{k+1} = 1$. Следовательно, $\beta_{k+1} \equiv \alpha_{k+1}$.

В итоге выражение (3) преобразуется к виду

$$x_{k+1} = \alpha_{k+1}\left(E - \tau_{k+1}C\right)x_k + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)x_{k-1}.$$

Выводы. В итоге получили, что x_{k+1} зависит только от x_k, x_{k-1} и не зависит от x_n, $n = \overline{0, k-2}$. Другими словами, доказано, что четырехслойная итерационная схема решения сеточных уравнений преобразуется к трехслойной схеме, поэтому использование первой не дает увеличения скорости сходимости по сравнению со второй.

Библиографический список

1. Сухинов, А. И. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков // Вычислительные методы и программирование : Новые вычислительные технологии. — 2012. — Т.13. — С. 290–297.

2. Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности / А. И. Сухинов [и др.] // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015). Труды международной научной конференции. — 2015. — С. 285–296.

3. Sukhinov, A. I., Chistyakov, A. E., Protsenko, E. A. Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs. Mathematical Models and Computer Simulations, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 351–363.

4. Сухинов, А. И. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. В. Алексеенко // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 3. — С. 3–21.

5. Сухинов, А. И. Математическая модель трансформации форм фосфора, азота и кремния в движущейся турбулентной водной среде в задачах динамики планктонных популяций / А. И. Сухинов, Ю. В. Белова // Инженерный вестник Дона. — 2015. — Т. 37, № 3. — С. 50.

6. Sukhinov, A. I., Khachunts, D. S., Chistyakov, A. E. A mathematical model of pollutant propagation in near-ground atmospheric layer of a coastal region and its software implementation. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2015, vol. 55, no. 7, pp. 1216–1231.

7. Сухинов, А. И. Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы и ее программная реализация на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов, Д. С. Хачунц, А. Е. Чистяков // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. — 2015. — Т. 19, № 1. — С. 185–195.

8. Сухинов, А. И. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря / А. И. Сухинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 9. — С. 3–21.

9. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — Москва : Наука, 1989. — 656 с.

10. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — Москва : Наука, 1989. — 432 с.

11. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — Москва : Наука, 1973. — 415 с.

References

1. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E. Parallel'naya realizatsiya trekhmernoy modeli gidrodinamiki melkovodnykh vodoemov na supervychislitel'noy sisteme. [Parallel implementation of a three-dimensional hydrodynamic model of shallow water basins on supercomputing systems.] Numerical Methods and Programming, 2012, vol.13, pp. 290-297 (in Russian).

2. Sukhinov, A.I., et al. Parallel'naya realizatsiya zadach transporta veshchestv i vosstanovleniya donnoy poverkhnosti na osnove skhem povyshennogo poryadka tochnosti. [Parallel implementation of transport tasks substances and restore the bottom surface on the basis of high order schemes.] Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT'2015). Trudy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. [Parallel Computing Technologies (PaVT’2015). Proc. Int. Sci. Conf.] 2015, pp. 285-296 (in Russian).

3. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E., Protsenko, E.A. Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs. Mathematical Models and Computer Simulations, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 351-363.

4. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E., Alekseenko, E.V. Chislennaya realizatsiya trekhmernoy modeli gidrodinamiki dlya melkovodnykh vodoemov na supervychislitel'noy sisteme. [Numerical realization of three-dimensional hydrodynamic model for shallow water basins on supercomputing system.] Mathematical Models and Computer Simulations, 2011, vol. 23, no. 3, pp. 3-21 (in Russian).

5. Sukhinov, A.I., Belova, Y.V. Matematicheskaya model' transformatsii form fosfora, azota i kremniya v dvizhushcheysya turbulentnoy vodnoy srede v zadachakh dinamiki planktonnykh populyatsiy. [Mathematical model of phosphorus, nitrogen and silicon forms transformation in moving turbulent water environment in problems of plankton population dynamics.] Engineering Journal of Don, 2015, vol. 37, no. 3, pp. 50 (in Russian).

6. Sukhinov, A.I., Khachunts, D.S., Chistyakov, A.E. A mathematical model of pollutant propagation in near-ground atmospheric layer of a coastal region and its software implementation. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2015, vol. 55, no. 7, pp. 1216-1231.

7. Sukhinov, A.I., Khachunts, D.S., Chistyakov, A.E. Matematicheskaya model' rasprostraneniya primesi v prizemnom sloe atmosfery i ee programmnaya realizatsiya na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme. [Mathematical model of impurities in the atmospheric boundary layer and its program implementation on a multiprocessor computer system.] Vestnik UGATU, 2015, vol. 19, no. 1, pp. 185-195 (in Russian).

8. Sukhinov, A.I., Nikitina, A.V., Chistyakov, A.E. Modelirovanie stsenariya biologicheskoy reabilitatsii azovskogo morya. [Numerical simulation of biological remediation Azov Sea.] Mathematical Models and Computer Simulations, 2012, vol. 24, no. 9, pp. 3-21 (in Russian).

9. Samarskiy, A.A. Teoriya raznostnykh skhem. [Theory of difference schemes.] Moscow: Nauka, 1989, 656 p. (in Russian).

10. Samarskiy, A.A., Gulin, A.V. Chislennye metody. [Numerical methods.] Moscow: Nauka, 1989, 432 p. (in Russian).

11. Samarskiy, A.A., Gulin, A.V. Ustoychivost' raznostnykh skhem. [Stability of difference schemes.] Moscow: Nauka, 1973, 415 p (in Russian).

Поступила в редакцию 29.07.2016
Сдана в редакцию 29.07.2016
Запланирована в номер 30.09.2016

Received 29.07.2016
Submitted 29.07.2016
Scheduled in the issue 30.09.2016